

Great Party

题意

有 n 堆石子，第 i 堆有 a_i 个，两个人轮流操作，每次可以从一堆中拿走任意正数个石子，并可以将剩余石子合并到另一堆中（也可以不合并）。每次询问给定 l 和 r 求 $[l, r]$ 中有多少个子段的石子单独拿出来进行游戏可以先手必胜。

$n, q \leq 10^5, a_i \leq 10^6$

题解

结论：奇数堆时先手必胜，偶数堆时 $\oplus_{i=1}^n (a_i - 1) \neq 0$ 时先手必胜。

证明：考虑数学归纳法。

1堆时显然先手必胜；2堆时双方都不可能进行合并操作，此时被迫拿完一堆的就输了，所以考虑将两堆数量都减1后当作nim游戏。

对于大于2的偶数，我们仍然按照上面的逻辑，每堆数量都减1后当作nim游戏。

对于大于2的奇数，我们考虑如何操作能将局面变为先手必败。我们考虑操作数量最多的堆，设该堆有 x 个。设第2大的堆有 y 个，第3大的堆有 z 个。显然除了最大的两堆之外的堆减1后的异或和 S 有 $S \leq 2 \cdot (z-1)$ 我们只需要将 y 补至 $S+1$ 即可。注意到 $x+y \geq 2 \cdot z \geq S+2$ 所以在将最大的堆拿走至少1个后仍然可以将次大的堆补至 $S+1$ 所以对于奇数堆我们有将其变为偶数堆先手必败的情况。

有了上述结论之后，我们每个询问就变成了求区间内长度为奇数的子段数加减1后异或和不为0的长度为偶数的子段数，这个问题显然可以变为总子段数减去异或和为0的长度为偶数的子段数，然后用莫队求解。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2022-2023:teams:eager_to_embrace_the_seniors_thigh:7k

Last update: 2022/08/09 18:29