

Easy Counting Problem

题意

w 到 w 这 w 种数每种至少在字符串中出现 c_1, c_2, \dots, c_w 次， q 次询问，每次给出一个 n 求长度恰好为 n 的字符串有多少种。

$w \leq 10, q \leq 300, n \leq 10^7, \sum{c_i} \leq 5 \times 10^4$

题解

考虑对每种数构建指数生成函数。对于数 i 显然有 $F_i = \sum_{j \geq c_i} \frac{x^j}{j!}$

然后对于每个询问的答案就是 $\text{ans} = n! [x^n] \prod_{i=1}^w F_i$

我们注意到这个题 $\sum{c_i}$ 很小但是 n 很大，考虑将 $F_i = \sum_{j \geq c_i} \frac{x^j}{j!} = e^x - \sum_{j=0}^{c_i-1} \frac{x^j}{j!}$

那么答案就可以写作 $\text{ans} = n! [x^n] \prod_{i=1}^w (e^x - \sum_{j=0}^{c_i-1} \frac{x^j}{j!})$

考虑变化后面的式子为 $\sum_{i=0}^w \sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{x^{i+k}}{(i+k)!} = \sum_{i=0}^w \sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{x^k}{k!}$ 定义 $f_{i,j}$ 表示前 i 种数里面选了 j 个的 $\sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{x^k}{k!}$ 的乘积的和，此时式子可以写作 $\sum_{i=0}^w \sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{x^i}{i!} f_{w-w-i}$

求 f 的时候考虑按照背包DP的方式求解，每次转移的时候做一次卷积。

最后对于每个询问的答案就是 $\text{ans} = n! \sum_{i=0}^w \sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} e^{(w-i)x} [x^{n-k}] f_{w-w-i}$ 其中 $[x^{n-k}] f_{w-w-i} = \frac{(w-i)!(n-k)!}{(n-k)!}$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2022-2023:teams:eager_to_embrace_the_seniors_thigh:c

Last update: 2022/08/07 14:43