

莫比乌斯反演推导Burnside引理公式

说在前面

本文将会用莫比乌斯反演推导\$Burnside\$引理，其适用于形似于以下的问题：给出一个长度为\$n\$的环，需要用\$m\$种颜色对其进行染色（染色可能有若干限制），请求出有多少本质不同的染色方案，其中我们认为两种染色方案本质相同，当且仅当两种染色方案在旋转后颜色可一一对应（注意此处仅为旋转，不包含翻转）。

解题过程

首先我们定义以下函数：

\$ans_n\$表示环的长度为\$n\$时的答案。

\$f_i\$表示长度为\$i\$的环在不考虑翻转变换的情况下有多少种染色方案。

\$g_i\$表示长度为\$i\$且最小循环节为\$i\$的环在不考虑翻转变换的情况下有多少种染色方案。

根据以上定义，我们可以轻松得出它们之间有以下关系：

$$ans_n = \sum_{i|n} \frac{g_i}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i|n} g_i \cdot \frac{n}{i} = \frac{1}{n} (g * id)_n$$

$$f_i = \sum_{j|i} g_j \Rightarrow f = g * 1 \Rightarrow g = f * \mu$$

将第二个式子代入第一个式子可得：

$$ans_n = \frac{1}{n} (f * \mu * id)_n = \frac{1}{n} (f * \phi)_n$$

通常情况下由于\$f\$数组相较于\$g\$数组限制较少，可以在更快的时间内处理出来，而\$\phi\$数组可通过线性筛求得。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2022-2023:teams:fire_and_blood:mobius_to_burnside&rev=1659080510

Last update: 2022/07/29 15:41