2022 牛客暑期多校训练营3

D

给定一棵树和一个起点，1号节点为终点，随机选其中K条边变成指向终点的单向边，在树上随机游走，求到达终点的期望步数。

不考虑选单向边，设 f_x 为从 x 走到其父亲的期望步数，则有 $f_x=\dfrac{1+\sum_v (1+f_v+f_x)}{d(x)}$，化简可得$f_x=d(x)+\sum_vf_v=2size(x)-1 $，其中 $size(x)$ 为 x 的子树大小。设出发点 s，其到 1 的路径 L 为 $s,v_k,\cdots,v_1,1$，则答案 $ans=f_s+f_{v_k}+\cdots+f_{v_1}$ 考虑单向边 (v,u) 带来的影响，当该边到 L 的路径上没有单项边时会对答案产生贡献，设路径长度为 len, L 与该路径交点到 1 的路径长度为 $L^\prime$,则对答案的贡献为 $$ -\dfrac{2*size(v)*\sum_{i=0}^{L^\prime-1}C_{n-1-len-i}^{K-1}}{C_{n-1}^{K-1}} $$ 预处理前缀和，时间复杂度 $O(n)$

G

题目大意：给两个凸包，各有速度，求相撞时间

设两个凸包为A和B，实际上可以认为B不动，A以速度V运动

设A凸包加上位移M后与B凸包有交，那么闵可夫斯基和可以在$O(nlogn)$的时间复杂度内求出位移M的合法区域P

若P中包含原点，则答案为0

从原点向V引一条射线，与P相交，求所有交点，取距离最短的那一个即可

I

本题需要求$E(x^k)$，在组合意义中一般处理的是方案数，于是考虑$n!E(x^k)$的组合意义

首先枚举哪些元素在对应位置上，然后其他元素错排： $$ n!E(x^k)=\sum_{i=0}^nC_n^ii^kD_{n-i} $$

套路：看到形如n^k的东西，需要想到第二类斯特林数

因为n^k表示把k个不同的球放入n个不同盒子（盒子可以为空）的方案数，我们枚举i为非空盒的个数，可得到 $$ n^k=\sum_{i=0}^kS(k,i)\times i!\times C(n,i) $$

然后将i^k用第二类斯特林数替换： $$ n!E(x^k)=\sum_{i=0}^nC_n^iD_{n-i}\sum_{j=0}^kS(k,j)j!C_i^j $$ **发现$C_n^i*C_i^j$具有组合意义，可替换成$C_n^j*C_{n-j}^{i-j}$，** $$ n!E(x^k)=\sum_{j=0}^kS(k,j)j!C_n^j\sum_{i=0}^nC_{n-j}^{i-j}D_{n-i} $$ **直接将i替换成$i+j$，** $$ n!E(x^k)=\sum_{j=0}^kS(k,j)j!C_n^j\sum_{i=0}^{n-j}C_{n-j}^{i}D_{n-i-j} $$ **当$j>n$时，后面那个$\sum_i=0$，否则有组合意义，实际上相当于长度为$n-j$的所有排列数，也就是$(n-j)!$，** $$ n!E(x^k)=\sum_{j=0}^{min(k,n)}S(k,j)j!C_n^j(n-j)! $$ **当$j>k$时$S(k,j)=0$，再将组合数拆开，可得到：** $$ n!E(x^k)=\sum_{j=0}^nS(k,j)n!\\ E(x^k)=\sum_{i=0}^nS(k,i) $$

发现模数$862118861=857×997×1009$，可以分别考虑每个质数，再使用中国剩余定理合并

由贝尔数的相关知识可以知道 $$ B_n=\sum_{k=0}^nS(n,k) $$ **于是当$k\leq n$时，答案就是B_n**

考虑到$k\leq n+5*10^3$，所以当$k>n$时，答案可以表示为 $$ E(x^k)=B_n-\sum\limits_{i=n+1}^kS(k,i) $$

现在考虑如何快速求B_n

贝尔数满足Touchard同余，则有 $$ B_{n+p}\equiv B_n+B_{n+1}(mod\,p) $$ **这是常系数齐次线性递推，可以在$O(k^2logn)$的复杂度内求出B_n**

现在考虑如何快速求$\sum\limits_{i=n+1}^kS(k,i)$

由题解给出的公式，有 $$ S(x,x-n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}E(n,k)*C_{x+n-k-1}^{2n}\\ E(n,k)=(2n-k-1)C_{n-1}^{k-1}+(k+1) $$ **组合数可以用卢卡斯定理快速计算，然后利用上述公式进行递推即可求解**