

题意简述

一个作用在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的一一映射 f 是好的，当且仅当其由不动点和二元置换组成，其权值为 $a^{\text{不动点个数}}$ (a 是给定常数)。求所有好的映射的权值和。

时限: 3s

数据范围: $n \leq 5 \times 10^9, 1 \leq a \leq 998244352$

题解

我们考虑令 $f(n)$ 表示 n 对应的答案。那么我们首先可以得到一个递推式为

$f(n) = a \cdot f(n-1) + (n-1) \cdot f(n-2)$ 其含义就是我们可以选择 n 是单独一个不动点还是和前面 $n-1$ 个数中的一个形成二元置换。

然后我们考虑直接写出 $f(n)$ 的表达式，就是

$f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} \cdot \frac{(2i)!}{2^i \cdot i!} \cdot a^{n-2i}$ 就是说枚举二元置换个数，然后方案数就是选 $2i$ 个出来之后，先去排列一下，之后去掉相邻的两个交换和整体 i 组之间的顺序。这个我们可以化简一下就是 $f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} \cdot (2i-1)!! \cdot a^{n-2i}$

我们考虑一下如果 $n < \text{MOD}$ 那么 $f(n+k \cdot \text{MOD})$ 和 $f(n)$ 之间会有什么关系。下面令 $N = n+k \cdot \text{MOD}$ 等号都是指模意义下相等。

$f(N) = \sum_{i=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2i} \cdot (2i-1)!! \cdot a^{N-2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N/\text{MOD}}{2i/\text{MOD}} \cdot \binom{n}{2i \% \text{MOD}} \cdot (2i-1)!! \cdot a^{N-2i}$ 这个时候我们先简单看看现在这个式子，首先可以看出来如果 $2i-1 \geq \text{MOD}$ 那么就没有意义了。然后就是如果 $2i-1 < \text{MOD}$ 那么相当于 $2i \leq \text{MOD}-1$ 于是有 $\binom{N/\text{MOD}}{2i/\text{MOD}} = \binom{k}{0} = 1$ 最后我们可以发现要想让 $\binom{n}{2i \% \text{MOD}}$ 不是 0 ，那么一定有 $2i \leq n$ 所以我们可以得到一个很重要的东西就是 $f(n+k \cdot \text{MOD}) = a^{k \cdot \text{MOD}} \cdot f(n) = a^k \cdot f(n)$

所以我们就相当于是只需要跑完模数范围内的递推就可以了，就是说在 3s 要跑 $1e9$ 的递推，在加上循环展开后就通过了这个题。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2023-2024:teams:al_in_and_back_to_whk:24-nowcoder-2:j

Last update: 2024/07/19 19:28