

格式：大部分已修改

1. 注意句号
2.  $\left(\right)$  通常用于括号内部内容较多的情况
3.  $\sum$  建议用  $\text{\texttt{\textbackslash text}}$  包裹

内容

1. 例 4 中至少要大致描述一下单调队列维护的东西，不能太简略
2. 例 5 中不能只给代码，无论如何都要讲一下大致做法。
3. 方便的话完善一下例 4、5 中更好的解法。

## 静态点分治

### 算法简介

一种利用分治进行树上路径统计的算法，算法时间复杂度一般为  $O(n \log n)$

### 算法思想

所有路径分为两种，一种是过根结点的，一种是完全在根结点的某棵子树中的。

因此可以考虑分治算法，选取一个点将无根树转换为有根树，然后递归处理每个棵以根节点的儿子为根的子树。

如果选取树的重心作为根结点，则每棵子树的结点数不超过  $\frac{n}{2}$  可以保证递归深度不超过  $\log n$

在这个基础上如果能在  $O(n)$  时间维护经过根结点路径相关信息，则算法总时间复杂度为  $O(n \log n)$

### 代码实现

重心的寻找可使用 dfs 处理出所有结点的  $\text{sz}$  所有结点的最大子树

$\text{mson}(u) = \max(\max(\text{sz}(\text{son}(u)), \text{tot\_sz} - \text{sz}(u)))$

不断更新  $\text{mson}$  最小的结点，最后便可以得到重心，时间复杂度  $O(n)$

分治过程需要注意标记已经访问的结点，同时更新子树大小  $\text{tot\_sz}$  具体实现见模板。

### 代码模板

```
int sz[MAXN], mson[MAXN], tot_sz, root, root_sz;
bool vis[MAXN];
void query(int u); // 自定义
```

```
void find_root(int u,int fa){
    sz[u]=1;mson[u]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        find_root(v,u);
        sz[u]+=sz[v];
        mson[u]=max(mson[u],sz[v]);
    }
    mson[u]=max(mson[u],tot_sz-sz[u]);
    if(mson[u]<root_sz){
        root=u;
        root_sz=mson[u];
    }
}
void solve(int u){
    vis[u]=true;query(u);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v])
            continue;
        tot_sz=sz[v];root_sz=inf;
        find_root(v,u);
        solve(root);
    }
}
```

## 代码练习

### 习题1

#### [洛谷p3806](#)

题目大意是说给定一棵  $n$  个结点的正权树，多次查询，每次查询是否存在长度为  $k$  的路径。

对根结点，先考虑暴力法，用树形 dp 求出子树上各节点到根结点的距离，然后两两枚举，看看有没有两个结点距离和为  $k$

这样每层递归的时间复杂度是  $O(n^2)$  显然会 T

考虑用中途相遇法，可以将每层递归的时间复杂度优化到  $O(n)$  单次查询时间复杂度  $O(n \log n)$

但要注意三点：

一、枚举过根结点的路径时路径两端点显然不能在同一棵子树里，所以要先求出一棵子树所有的  $\text{dist}$  全部判断完后再进行标记。

二、题目给定  $k \leq 10^7$  所以不用标记大于  $10^7$  的  $\text{dist}$

三、清空标记不能用  $\text{memset}$  会 T 这里开了一个  $\text{vector}$  来记录之前的标记。

另一个优化是可以离线处理查询，这样只需要分治一次，可以减小常数。

```

#include <cstdio>
#include <cctype>
#include <vector>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
using namespace std;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
const int MAXN=1e4+5,inf=1e7+5;
struct Edge{
    int to,w,next;
}edge[MAXN<<1];
int n,edge_cnt,head[MAXN];
int m,q[MAXN];
int sz[MAXN],mson[MAXN],tot_sz,root,root_sz;
int dis[MAXN];
vector<int> d,sd;
bool vis[MAXN],mark[inf],ok[MAXN];
void Insert(int u,int v,int w){
    edge[++edge_cnt].to=v;
    edge[edge_cnt].w=w;
    edge[edge_cnt].next=head[u];
    head[u]=edge_cnt;
}
void find_root(int u,int fa){
    sz[u]=1;mson[u]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        find_root(v,u);
        sz[u]+=sz[v];
        mson[u]=max(mson[u],sz[v]);
    }
    mson[u]=max(mson[u],tot_sz-sz[u]);
    if(mson[u]<root_sz){
        root=u;
        root_sz=mson[u];
    }
}
void dfs(int u,int fa){
    d.push_back(dis[u]);

```

```
for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
    int v=edge[i].to;
    if(vis[v]||v==fa)
        continue;
    dis[v]=dis[u]+edge[i].w;
    dfs(v,u);
}
}
void query(int u){
    sd.clear();
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        d.clear();
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v])
            continue;
        dis[v]=edge[i].w;
        dfs(v,u);
        _for(j,0,d.size())
        _for(k,0,m){
            if(q[k]>=d[j])
                ok[k]|=mark[q[k]-d[j]];
        }
        _for(j,0,d.size()){
            if(d[j]<inf){
                mark[d[j]]=true;
                sd.push_back(d[j]);
            }
        }
    }
    _for(i,0,sd.size())
    mark[sd[i]]=false;
}
void solve(int u){
    vis[u]=mark[0]=true;query(u);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v])
            continue;
        tot_sz=sz[v];root_sz=inf;
        find_root(v,u);
        solve(root);
    }
}
int main()
{
    n=read_int(),m=read_int();
    int u,v,w;
    _for(i,1,n){
        u=read_int()-1,v=read_int()-1,w=read_int();
```

```

        Insert(u,v,w);
        Insert(v,u,w);
    }
    _for(i,0,m)
    q[i]=read_int();
    root_sz=inf;
    tot_sz=n;
    find_root(0,-1);
    solve(root);
    _for(i,0,m){
        if(ok[i])
            puts("AYE");
        else
            puts("NAY");
    }
    return 0;
}

```

## 习题2

### 洛谷p4149

给一棵树，每条边有权。求一条简单路径，权值和等于  $sq$  且边的数量最小。

类似习题1，开个  $\text{mark}$  数组存一下到根结点距离为  $\text{dist}$  的路径的最短边数。

$\text{vector}$  不仅要记录距离，还要记录深度，时间复杂度  $O(n \log n)$

```

#include <cstdio>
#include <cctype>
#include <vector>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
using namespace std;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
const int MAXN=2e5+5,inf=1e6+5;
struct Edge{
    int to,w,next;
}edge[MAXN<<1];
int n,edge_cnt,head[MAXN];
int sz[MAXN],mson[MAXN],tot_sz,root,root_sz;
int dis1[MAXN],dis2[MAXN],mark[inf],q,ans=MAXN;
vector<pair<int,int> > d,sd;
bool vis[MAXN];
void Insert(int u,int v,int w){

```

```
edge[++edge_cnt].to=v;
edge[edge_cnt].w=w;
edge[edge_cnt].next=head[u];
head[u]=edge_cnt;
}
void find_root(int u,int fa){
sz[u]=1;mson[u]=0;
for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
int v=edge[i].to;
if(vis[v]||v==fa)
continue;
find_root(v,u);
sz[u]+=sz[v];
mson[u]=max(mson[u],sz[v]);
}
mson[u]=max(mson[u],tot_sz-sz[u]);
if(mson[u]<root_sz){
root=u;
root_sz=mson[u];
}
}
void dfs(int u,int fa){
if(dis1[u]>q)
return;
d.push_back(make_pair(dis1[u],dis2[u]));
for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
int v=edge[i].to;
if(vis[v]||v==fa)
continue;
dis1[v]=dis1[u]+edge[i].w;
dis2[v]=dis2[u]+1;
dfs(v,u);
}
}
void query(int u){
mark[0]=0;
sd.clear();
for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
int v=edge[i].to;
if(vis[v])
continue;
d.clear();
dis1[v]=edge[i].w,dis2[v]=1;
dfs(v,u);
_for(j,0,d.size())
ans=min(ans,d[j].second+mark[q-d[j].first]);
_for(j,0,d.size()){
mark[d[j].first]=min(mark[d[j].first],d[j].second);
sd.push_back(d[j]);
}
```

```

    }
}
_for(i,0,sd.size())
mark[sd[i].first]=MAXN;
}
void solve(int u){
vis[u]=true;query(u);
for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
int v=edge[i].to;
if(vis[v])
continue;
tot_sz=sz[v];root_sz=MAXN;
find_root(v,u);
solve(root);
}
}
int main()
{
n=read_int(),q=read_int();
int u,v,w;
_for(i,1,n){
u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
Insert(u,v,w);
Insert(v,u,w);
}
_for(i,0,inf)
mark[i]=MAXN;
root_sz=MAXN;
tot_sz=n;
find_root(0,-1);
solve(root);
if(ans==MAXN)
puts("-1");
else
printf("%d",ans);
return 0;
}

```

### 习题3

[洛谷p4178](#)

给定一棵  $n$  个结点的正权树和一个正数  $k$  统计有多少对结点  $(a,b)$  满足  $\text{dist}(a,b) \leq k$

把中途相遇法换成树状数组或名次树即可，时间复杂度  $O(n \log^2 n)$

### 习题4

[UVA12161](#)

给定一棵  $n$  个结点的树，每条边包含长度  $L$  和费用  $D$  ( $1 \leq D, L \leq 1000$ )。选择一条总费用不超过  $m$  的路径，使得路径总长度最大。

考虑单调队列，时间复杂度  $O(n \log^2 n)$ 。另外本题存在  $O(n \log n)$  解法，有兴趣的可以自己尝试。

## 习题5

### 洛谷P2664

给定一棵  $n$  个结点的树，树的每个节点有个颜色。

定义  $s(i, j)$  为  $i$  到  $j$  的颜色数量。要求输出所有  $\sum_{i=1}^n s(i, j)$ 。

这题需要计算贡献，思路较复杂，这里只给出代码供参考，时间复杂度  $O(n \log n)$ 。另外本题存在  $O(n)$  解法，有兴趣的可以自己尝试。

```
#include <cstdio>
#include <cctype>
#include <vector>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e5+5;
struct Edge{
    int to,next;
}edge[MAXN<<1];
int n,c[MAXN],edge_cnt,head[MAXN];
int sz[MAXN],mson[MAXN],tot_sz,root,root_sz;
LL sum,cnt[MAXN],col[MAXN],ans[MAXN],base,num;
bool vis[MAXN];
void Insert(int u,int v){
    edge[++edge_cnt].to=v;
    edge[edge_cnt].next=head[u];
```

```

    head[u]=edge_cnt;
}
void find_root(int u,int fa){
    sz[u]=1;mson[u]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        find_root(v,u);
        sz[u]+=sz[v];
        mson[u]=max(mson[u],sz[v]);
    }
    mson[u]=max(mson[u],tot_sz-sz[u]);
    if(mson[u]<root_sz){
        root=u;
        root_sz=mson[u];
    }
}
void dfs(int u,int fa){
    sz[u]=1,cnt[c[u]]++;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        dfs(v,u);
        sz[u]+=sz[v];
    }
    if(cnt[c[u]]==1){//该颜色第一次出现时,将其子树对根结点的答案的贡献算的该结点上
        sum+=sz[u];
        col[c[u]]+=sz[u];
    }
    cnt[c[u]]--;
}
void change(int u,int fa,int type){
    cnt[c[u]]++;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        change(v,u,type);
    }
    if(cnt[c[u]]==1){
        sum+=sz[u]*type;
        col[c[u]]+=sz[u]*type;
    }
    cnt[c[u]]--;
}
void cal(int u,int fa){
    cnt[c[u]]++;
    if(cnt[c[u]]==1){//该颜色对所有子代均产生贡献
        sum-=col[c[u]];
    }
}

```

```
        num++;
    }
    ans[u]+=sum+base*num;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        cal(v,u);
    }
    if(cnt[c[u]]==1){
        sum+=col[c[u]];
        num--;
    }
    cnt[c[u]]--;
}
void clear(int u,int fa){
    col[c[u]]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v]||v==fa)
            continue;
        clear(v,u);
    }
}
void query(int u){
    sum=num=0;dfs(u,-1);//得到所有子树对根的贡献
    ans[u]+=sum;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v])
            continue;
        sum-=sz[v];col[c[u]]-=sz[v];
        cnt[c[u]]++;change(v,u,-1);cnt[c[u]]--;//消除该子树贡献
        base=sz[u]-sz[v];cal(v,u);
        sum+=sz[v];col[c[u]]+=sz[v];
        cnt[c[u]]++;change(v,u,1);cnt[c[u]]--;
    }
    clear(u,-1);
}
void solve(int u){
    vis[u]=true;query(u);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(vis[v])
            continue;
        tot_sz=sz[v];root_sz=MAXN;
        find_root(v,u);
        solve(root);
    }
}
```

```
}
int main()
{
    n=read_int();
    _for(i,0,n)
    c[i]=read_int();
    int u,v,w;
    _for(i,1,n){
        u=read_int()-1,v=read_int()-1;
        Insert(u,v);
        Insert(v,u);
    }
    root_sz=MAXN;
    tot_sz=n;
    find_root(0,-1);
    solve(root);
    _for(i,0,n)
    enter(ans[i]);
    return 0;
}
```

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=technique:centroid\\_decomposition&rev=1591011052](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=technique:centroid_decomposition&rev=1591011052) 

Last update: **2020/06/01 19:30**