有限二人零和博弈

设 \$A\in\mathbb{R}^{n\times m}\$ \parallel \$X=\{1,2,\cdots,n\}\$ \parallel \$Y=\\{1,2,\cdots,m\}\$ \parallel 即 \$X\$ \parallel \$Y\$ 均为有限集 \parallel \$\ll \$X\$ 表示玩家 \L 的(纯)策略集合 \parallel \$Y\$ 表示玩家 \L 的(纯)策略集合。若玩家 \L 选择纯策略 \$i\in X\$ \parallel 玩家 \L 选择纯策略 \$j\in Y\$ \parallel 那么玩家 \L 将获得 \$A_{ij}\$ 的收益,玩家 \L 将获得 \$-A_{ij}\$ 的收益(零和)。注意在该游戏的原始定义中,两人应当同时提出策略,即不知道对方的策略。此外,不妨将玩家 \L 的收益也称为 \$A\$ \parallel 但是他的目标是最小化之。

此外,考虑混和策略 \$X^{*}\$ 和 \$Y^{*}\$□

\$\$

 $Y^{*}=\\ \boldsymbol{q}=(q_{1},q_{2},\cdots,q_{m})^{T}:q_{i}\geo\land\sum_{i=1}^{m}q_{i}=1)$

含义为玩家 | 以 \$p_{i}\$ 的概率选择纯策略 \$i\$[]下文中,不加说明的策略均指混合策略。

现在改变一下游戏规则,不妨假设玩家 II 需要先声明自己的策略,玩家 I 随后选择自己的策略。那么玩家 I 选择策略 h boldsymbol h 的收益是 h boldsymbol h p h

 $\$ \overline{V}=\min_{\boldsymbol{q}\in Y^{*}}\max_{\boldsymbol{p}\in X^{*}}\boldsymbol{p}^{T}A\boldsymbol{q} \$\$

可以发现,这意味着玩家 II 可以在原游戏中保证自己的收益不超过 \$\overline{V}\$\[]他只要选择同样的操作即可。

将两人的操作顺序反过来,同理有

 $\$ \underline{V}=\max_{\boldsymbol{p}\in X^{*}}\min_{\boldsymbol{q}\in Y^{*}}\boldsymbol{p}^{T}A\boldsymbol{q} \$\$

这意味着玩家 I 可以在原游戏中保证自己的收益不低于 \$\underline{V}\$□他只要选择同样的操作即可。

首先证明 \$\underline{V}\le\overline{V}\$□这对于任意集合 \$X^{*}\$ 和 \$Y^{*}\$ 和定义在 \$X^{*}\times Y^{*}\$ 上的实值函数 \$f\$ 都成立,即证明

 $x \in X^{*}}\min {y\in Y^{*}}f(x,y)\leq (y\in Y^{*}}\max {x\in X^{*}}f(x,y)$

注意到

 $\pi {y'\in Y^{*}}f(x,y')\leq f(x,y)\leq X^{*}f(x',y)$

对任意 \$x,y\$ 都成立。因此对左侧加上 \$\max_{x\in X^{*}}\$□右侧加上 \$\min_{y\in Y^{*}}\$ 不影响不等式。

事实上,可以证明在这一问题中□\$\underline{V}=\overline{V}\$□注意到在上述两种简化问题中,后手必然有最优的纯策略。事实上最优的策略是所有最优的纯策略的线性组合。考虑线性规划问题

 $\star {\max_{i=1}^{n}p {i}a {ij} $$}$

s.t.

 $s\ \sum_{i=1}^{n}p_{i}=1\ p_{i}\$

但是这不是个线性规划,因为优化目标中有个 \$\min\$□添加一个辅助变量 \$v\$□

\$\$ \text{maximize}\;\;\;\;\;\ \$\$

s.t.

 $\$ v\le\sum_{i=1}^{n}p_{i}a_{ij}\text{ for all } j\\ \sum_{i=1}^{n}p_{i}=1\\ p_{i}\

它的解即为 \$\underline{V}\$□

考虑另一个线性规划:

\$\$ \text{minimize}\;\;\;\;\;\ \$\$

s.t.

 $\$ v\le\sum {j=1}^{m}a {ij}q {j}\text{ for all } i\\ \sum {j=1}^{m}q {j}=1\\ q {j}\\ q {j}\\

它的解即为 \$\overline{V}\$\pi

这样一来,玩家 | 可以保证自己至少获得 \$V\$ 的收益,玩家 || 可以保证对方至多获得 \$V\$ 的收益。那么显然两人都会按照这样的策略行动。这也预示着该问题可用线性规划求解。

From:

https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=technique:finite_two_person_zero_sum_game&rev=1625847630

Last update: 2021/07/10 00:20

https://wiki.cvbbacm.com/

×